Testes de raiz unitária

Avaliando estacionariedade em séries temporais financeiras

Wilson Freitas
Quant Developer

Recursos

- index.Rmd

Testes de Raiz Unitária

Definição do teste de raiz unitária

Existem diversos testes de raiz unitária (RU)

1. Augmented Dickey-Fuller (ADF)
2. Phillips-Perron (PP)
3. Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS)
4. ...

Na maioria dos testes a hipótese nula é de que a série tenha raiz unitária, e portanto não seja estacionária, logo:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \text{tem raiz unitária (não é estacionária)} \\
H_1 &: \text{não tem raiz unitária (é estacionária)}
\end{aligned}
$$

No teste KPSS a hipótese nula é de que não existe raiz unitária.

Implementando o teste de raiz unitária

Temos uma série temporal y_t e desejamos estimar o seguinte modelo para esta série:

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

que claramente é um AR(1) e está sujeito a

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &\sim iid\, N(0, \sigma^2)\ \forall\ t \\ \mathrm{E}[\varepsilon_t \varepsilon_s] &= 0,\ \ \forall\ t \neq s \end{aligned}$$

Para que y_t seja estacionário temos que obter ϕ que atenda a restrição $|\phi| < 1$. Logo, as hipóteses do teste devem reescritas como:

$$\begin{aligned} &H_0 : \phi = 1,\ y_t \text{ não é estacionário} \\ &H_1 : |\phi| < 1,\ y_t \text{ é estacionário} \end{aligned}$$

Testar a estacionariedade $\longrightarrow$ teste-t sobre $\hat{\phi}$

No entanto, é mais comum testar se os coeficientes são nulos de forma que uma simples transformação no modelo nos leva a

$$\Delta y_t = (\phi - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t = \pi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

e consequentemente novas hipóteses

$$H_0 : \pi = 0,\ y_t \text{ não é estacionário}$$
$$H_1 : \pi < 0,\ y_t \text{ é estacionário}$$

Esta abordagem é utilizada no teste ADF.

Infelizmente, na prática a teoria é outra de forma que nem sempre é possível utilizar apenas um AR(1) para identificar a existência de raiz unitária. Algumas séries possuem uma estrutura mais complexa e um simples AR(1) não é suficiente para capturá-la.

Veremos a seguir como os testes ADF e PP contornam este problema.

Testes de Dickey-Fuller

Testes de Dickey-Fuller

Segundo Dickey-Fuller, devem ser consideradas 3 abordagens para realizar o teste de raiz unitária (considerando $H_0 : \pi = 0$).

Random-walk com drift e tendência deterministica

$$\Delta Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + \pi Z_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \Delta Z_{t-i} + \varepsilon_t$$

Random-walk com drift

$$\Delta Z_t = \beta_0 + \pi Z_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \Delta Z_{t-i} + \varepsilon_t$$

Random-walk plain-vanilla

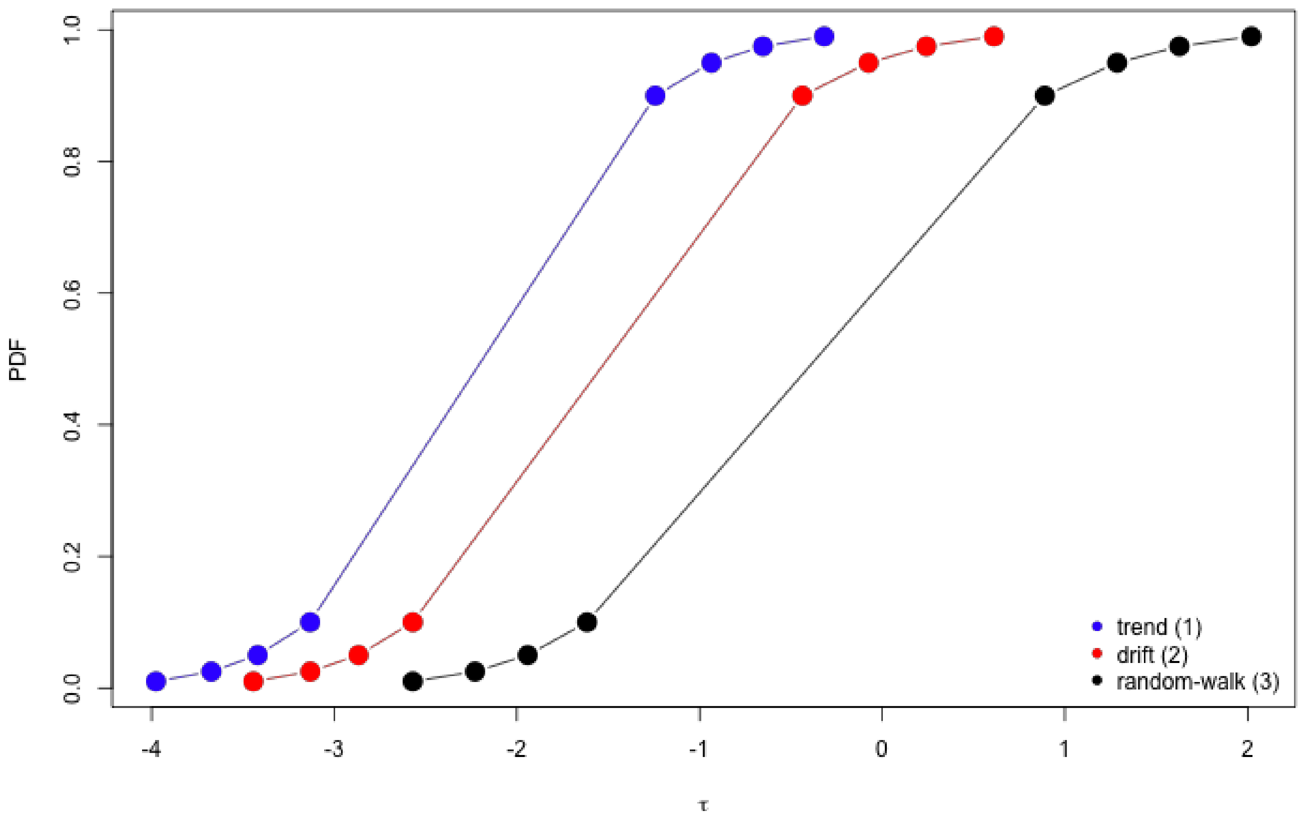
$$\Delta Z_t = \pi Z_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \Delta Z_{t-i} + \varepsilon_t$$

- A estrutura do AR(1) foi extendida para acomodar uma estrutura ARMA(p,q) mais geral.
- Essa extenção é conhecida como augmented Dickey-Fuller (ADF).
- O teste considerando apenas o modelo AR(1) é o teste de Dickey-Fuller padrão que pode ser tratado como uma caso particular do teste ADF quando $p = 1$.
- A estatística de interesse é

  $$\tau_i = \frac{\hat{\phi} - 1}{S_{\hat{\phi}}}$$

  onde $i = 1, 2, 3$ representam os modelos propostos.
- Note que apesar do teste de RU ter uma *jeitão* de teste-t, na prática não é, pois a distribuição de τ_i não é uma t de Student.
- Cada modelo proposto possui uma distribuição para τ_i.
- As distribuições para τ_i são obtidas através de simulações de Monte-Carlo (MacKinnon 1996).

- O gráfico abaixo apresenta os p-valores da estatística τ_i.



Teste ADF no R

O teste ADF no R está na função `ur.df` do pacote `urca` implementado por Bernhard Pfaff autor do livro Analysis of Integrated and Cointegrated Time Series with R (Use R!).

```
args(ur.df)
```

```
## function (y, type = c("none", "drift", "trend"), lags = 1, selectlags = c("Fixed",
##     "AIC", "BIC"))
## NULL
```

- `type` recebe o modelo a ser considerado na realização do teste. `none` define o modelo random-walk plain-vanilla e os demais parâmetros são auto-explicativos.
- `selectlags` define qual o critério será utilizado para a seleção do modelo estimado. `Fixed` é o padrão de forma que o modelo é estimado com os `lags` fornecidos e não há seleção de modelo.
- `lags` define a quantidade de lags a ser utilizada na estimação da parte ARMA(p,q) do modelo. Este parâmetro deve ser utilizado em conjunto com o parâmetro `selectlags`. Se `selectlags` for `AIC` ou `BIC` o valor de `lags` é a quantidade máxima de parâmetros que um modelo poderá possuir. Logo, na dúvida chute um número razoável para `lags` e reze, porque a partir daqui já virou uma questão de fé.

Vamos aplicar o teste ADF a série diária do log do BOVESPA para o ano de 2011. Note que a série claramente apresenta uma tendência de queda, e isto para mim são bons indícios de que o modelo com tendência deterministica seja adequado para realizar o teste de RU.

Começemos com `type="trend"`, `lags=4` e `selectlags="BIC"` e soca a bota.

```r
library(urca)
ur <- ur.df(y = BVSP.price, lags = 4, type = "trend", selectlags = "BIC")
ur@testreg
```

```
##
## Call:
## lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + tt + z.diff.lag)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.08919 -0.00895  0.00070  0.00934  0.03885
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  5.51e-01   2.38e-01    2.31    0.022 *
## z.lag.1     -4.95e-02   2.14e-02   -2.32    0.021 *
## tt          -4.65e-05   2.74e-05   -1.70    0.091 .
## z.diff.lag  -2.18e-02   6.47e-02   -0.34    0.736
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.0156 on 240 degrees of freedom
## Multiple R-squared: 0.0252,  Adjusted R-squared: 0.013
## F-statistic: 2.07 on 3 and 240 DF,  p-value: 0.105
```

Conclusões

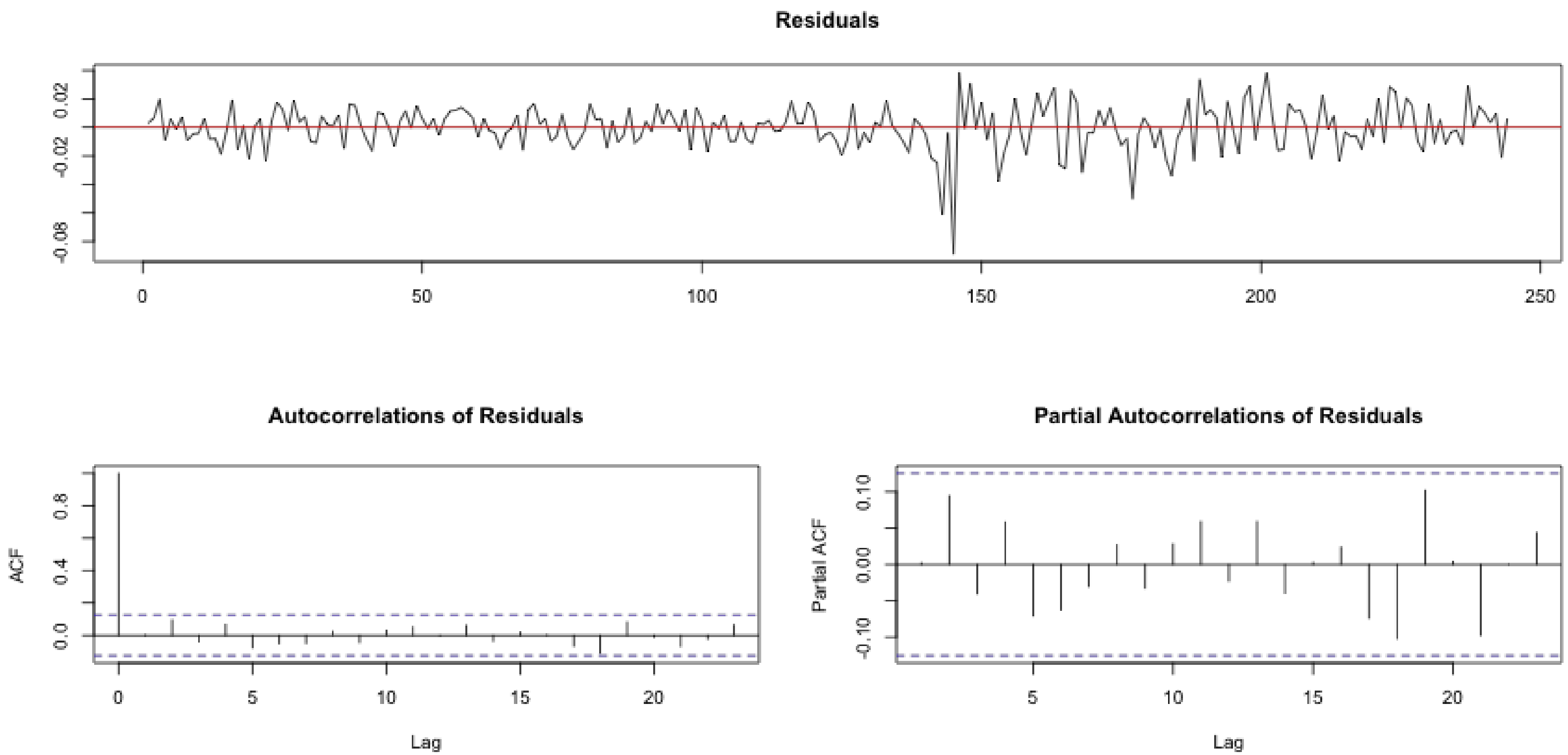
- O modelo selecionado foi `lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + tt + z.diff.lag)` com `lags=1`, mesmo fornecendo `lags=4`
- O coeficiente da tendência `tt` é negativo mantendo a coerência com o gráfico.
- O coeficiente `z.lag.1`, parâmetro de interesse para o teste de raiz unitária e para avaliar a sua insignificância precisamos da tabela de valores críticos que fica na variável `ur@cval` do teste.

```
##       1pct  5pct 10pct
## tau3 -3.99 -3.43 -3.13
## phi2  6.22  4.75  4.07
## phi3  8.43  6.49  5.47
```

- `tau3` é a estatística referente ao coeficiente `z.lag.1` e estes são os dados que interessam, a informação de significância da tabela `Coefficients` refere-se ao teste-t. Na mesma tabela temos que o valor da estatistíca para `z.lag.1` é -2.32 e avaliando os níveis críticos de `tau3` concluímos que não é possível rejeitar a hipótese nula para `z.lag.1` e, portanto, a série tem raiz unitária e é não-estacionária.

Ahhh ... os resíduos

É importante, obviamente, dar uma olhada nos resíduos. A variável `ur@res` contem os resíduos e o comando `plot(ur)` gera o gráfico abaixo.



Sanity-check

- Apenas para ter certeza de que as coisas funcionam como deveriam funcionar vamos realizar o teste ADF com um random-walk gerado.
- Vamos usar `type="none"`, pois o random-walk foi gerado sem drift e sem tendência deterministica.

```
ur <- ur.df(y = cumsum(c(100, rnorm(250))), lags = 4, type = "none", selectlags = "BIC")
```

Os resultados estão no próximo slide.

```
##
## Call:
## lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -2.320 -0.647 -0.111  0.599  3.184
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## z.lag.1    -0.000165   0.000593   -0.28     0.78
## z.diff.lag -0.058213   0.063937   -0.91     0.36
##
## Residual standard error: 0.944 on 244 degrees of freedom
## Multiple R-squared: 0.00368, Adjusted R-squared: -0.00448
## F-statistic: 0.451 on 2 and 244 DF,  p-value: 0.638
```

Conclusões

- O valor da estatística de interesse é -0.28.
- Os valores críticos para o teste são

```
##       1pct  5pct 10pct
## tau1 -2.58 -1.95 -1.62
```

- Note que `tau1` é a variável de interesse, pois refere-se ao modelo random-walk plain-vanilla e os seus valores críticos são diferentes daqueles obtidos no teste com a série do Bovespa onde a variável era `tau3`.
- Não rejeitamos a hipótese nula e portanto:
  - A série tem raiz unitária
  - A série é não-estacionária

Testes de raiz unitária

twitter @aboutwilson
www www.aboutwilson.net/trading-strategies/
github github.com/wilsonfreitas