

Teoria de carteiras de Markowitz

Wilson Freitas
Quant Developer

download de recursos

- [index.Rmd](#): código fonte da apresentação
- [portfolio.r](#): conjunto de funções em R para cálculo de fronteira eficiente de carteiras desenvolvido por Eric Zivot
- [getReturns.r](#): funções para facilitar o cálculo de retorno de séries temporais carregadas de arquivos do Yahoo! Finance
- [PETR3.monthly.raw.csv](#), [PETR4.monthly.raw.csv](#)
- [VALE3.monthly.raw.csv](#), [VALE5.monthly.raw.csv](#)
- [USIM3.monthly.raw.csv](#), [USIM5.monthly.raw.csv](#)
- [ITUB3.monthly.raw.csv](#), [ITUB4.monthly.raw.csv](#)

Carregando `getReturns.r`

É necessário carregar o *módulo* `getReturns.r` que contém a função `getReturnsFromYahooFiles`, que será útil para gerar os retornos a partir dos dados baixados do Yahoo! Finance.

```
source("scripts/getReturns.r")
```

Carregando as séries temporais

Os arquivos CSV foram baixados do Yahoo! Finance e contém os dados de preços das ações com periodicidade mensal (referentes ao começo de cada mês). A função `getReturnsFromYahooFiles` carrega os arquivos e devolve as séries de retornos referentes a coluna de preço de fechamento ajustado (`Adj.Close`).

```
filelist <- c("data/VALE3.monthly.raw.csv", "data/PETR3.monthly.raw.csv")
returns.monthly.x <- getReturnsFromYahooFiles(filelist)
```

```
##           VALE3      PETR3
## Feb 2000  0.01646  0.234749
## Mar 2000 -0.01646  0.024317
## Apr 2000  0.00000 -0.094410
## May 2000  0.04066  0.009852
## Jun 2000  0.07667 -2.034706
## Jul 2000 -0.01113 -0.133531
```

Calculando as estatísticas descritivas

Média anual

```
muhat.annual <- apply(returns.monthly.x, 2, mean) * 12
```

```
## VALE3  PETR3  
## 0.2096 0.1584
```

Desvio padrão anual

```
sigma2.annual <- apply(returns.monthly.x, 2, var) * 12  
sigma.annual <- sqrt(sigma2.annual)
```

```
## VALE3  PETR3  
## 0.5412 0.9223
```

Calculando as estatísticas descritivas

Covariância anual

```
covmat.annual <- cov(returns.monthly.x) * 12  
covhat.annual <- cov(returns.monthly.x)[1, 2] * 12
```

```
## [1] 0.07234
```

Correlação

```
rhohat.annual <- cor(returns.monthly.x)[1, 2]
```

```
## [1] 0.1449
```

Calculando as estatísticas descritivas

Para os cálculos da fronteira eficiente vamos separar as variáveis de forma que o sufixo i é referente a PETR3 e o sufixo v refere-se a VALE3. O sufixo vi relaciona ambas séries temporais.

```
mu.v = muhat.annual["VALE3"]
mu.i = muhat.annual["PETR3"]
sig2.v = sigma2.annual["VALE3"]
sig2.i = sigma2.annual["PETR3"]
sig.v = sigma.annual["VALE3"]
sig.i = sigma.annual["PETR3"]
sig.vi = covhat.annual
rho.vi = rhohat.annual
```

Criando uma carteira

Dado o retorno esperado da carteira

$$\mu_p(x_v, x_i) = x_v \mu_v + x_i \mu_i$$

e a sua variância

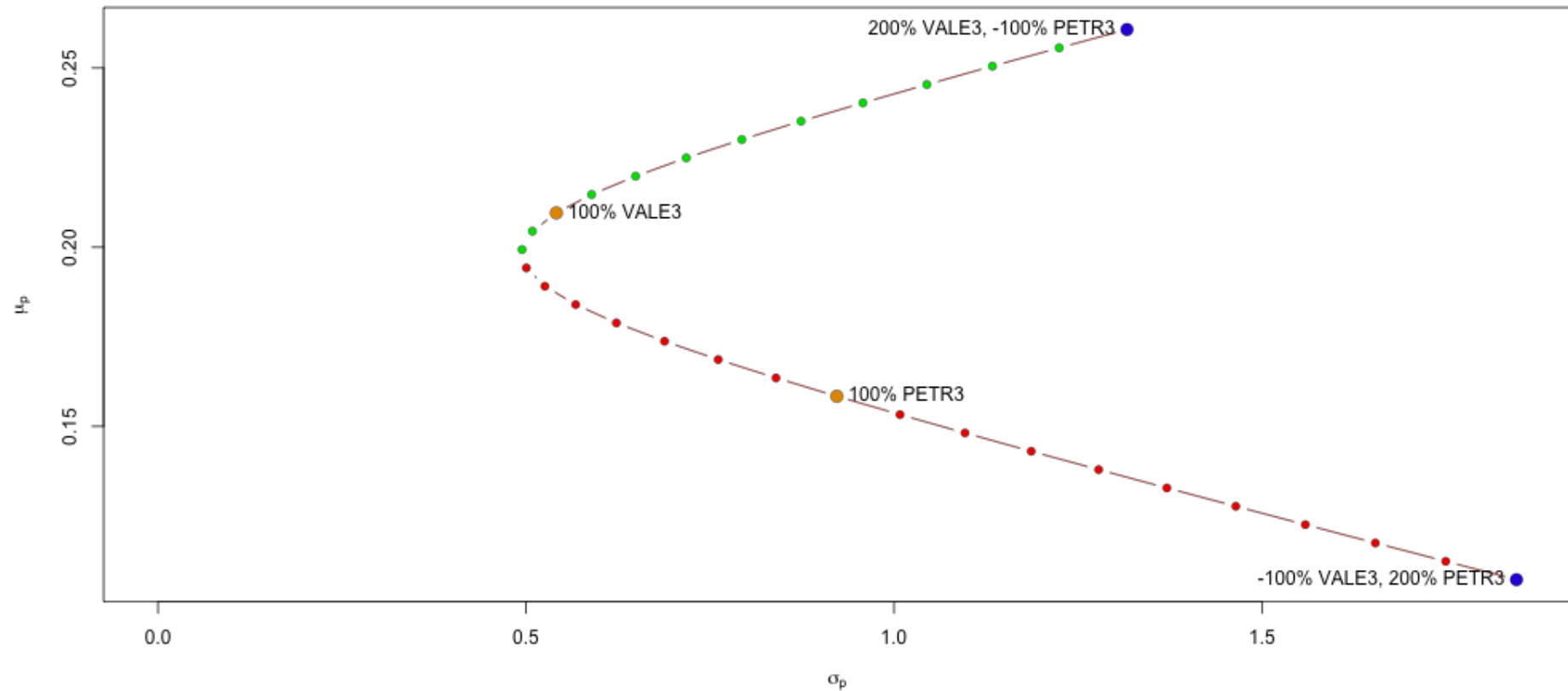
$$\sigma_p^2(x_v, x_i) = \sigma_v^2 x_v^2 + \sigma_i^2 x_i^2 + 2x_v x_i \sigma_{vi}$$

vamos calculá-los para diferentes combinações de pesos (x_v e x_i) sujeitas a restrição $x_v + x_i = 1$

```
x.v = seq(from = -1, to = 2, by = 0.1) # pesos para VALE3
x.i = 1 - x.v # pesos para PETR3
mu.p = x.v * mu.v + x.i * mu.i # retorno esperado da carteira
sig2.p = sig2.v * x.v^2 + sig2.i * x.i^2 + 2 * x.v * x.i * sig.vi
sig.p = sqrt(sig2.p) # volatilidade da carteira
```


Fronteira eficiente (2 ativos / long-short)

Destacado em laranja temos os ativos independentes.



Calculando a carteira de mínima variância

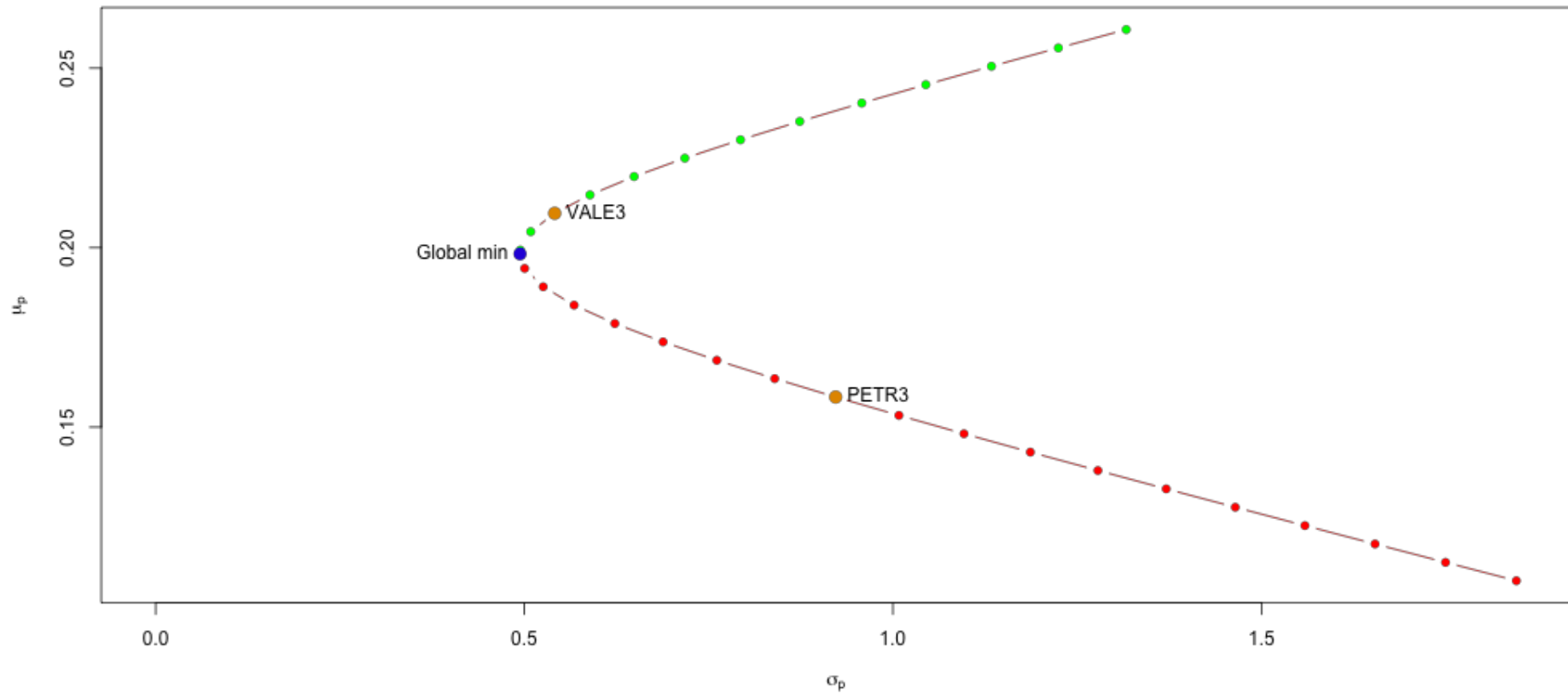
Para o cálculo da Sharpe-Ratio da carteira de mínima variância é necessário definir uma taxa livre de risco. Aqui vamos considerar $r_f = 7\%$.

```
r.f = 0.07
source("scripts/portfolio.r")
gmin.port = globalMin.portfolio(muhat.annual, covmat.annual)
summary(gmin.port, risk.free = r.f)
```

```
## Call:
## globalMin.portfolio(er = muhat.annual, cov.mat = covmat.annual)
##
## Portfolio expected return:      0.1983
## Portfolio standard deviation:   0.4942
## Portfolio Sharpe Ratio:        0.2595
## Portfolio weights:
## VALE3  PETR3
## 0.7792 0.2208
```

Fronteira eficiente (2 ativos / long-short)

Destacado em azul temos a carteira de mínima variância



Calculando a carteira tangente

Ao considerarmos um ativo livre de risco como mais uma alternativa de investimento chegamos ao seguinte retorno (μ_N) da nova carteira que compõe a carteira com 2 ativos mais o ativo livre de risco

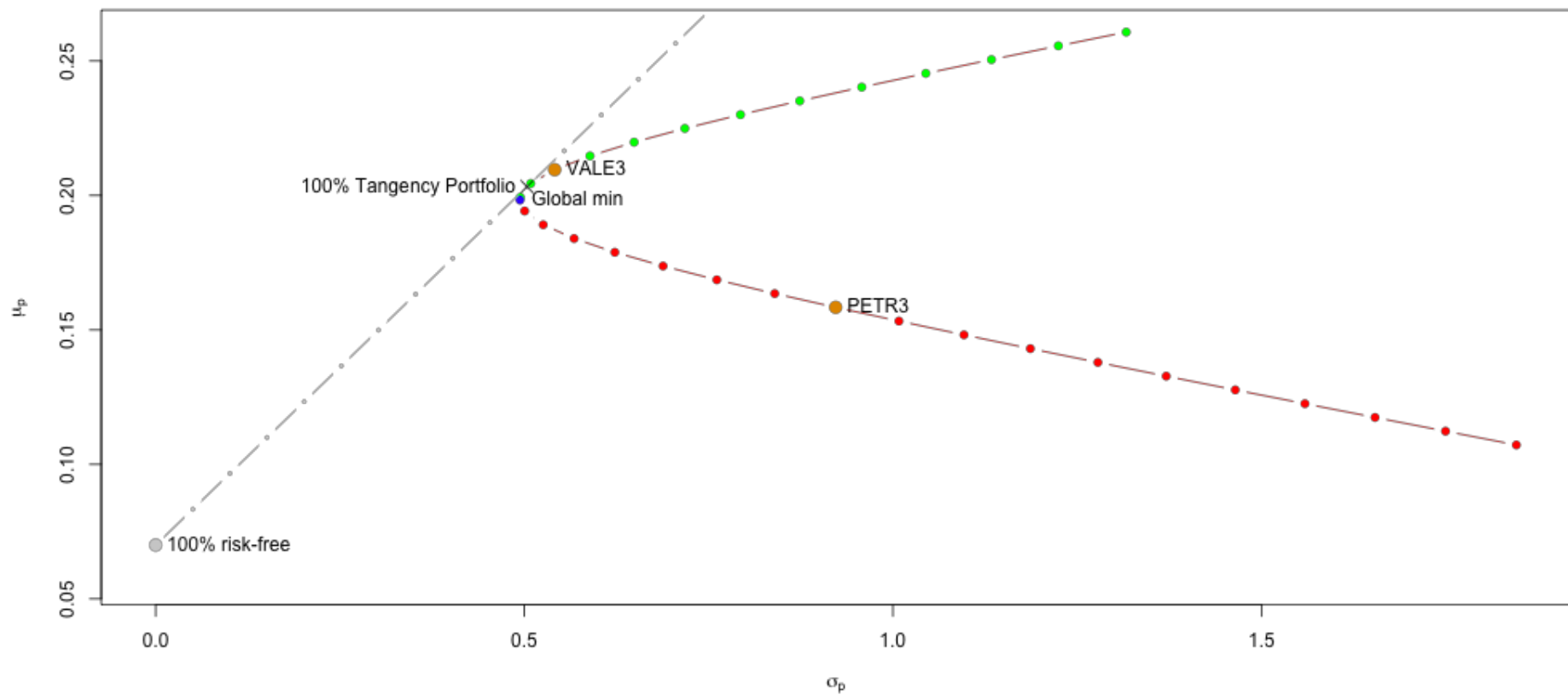
$$\mu_N = r_f + x_p(\mu_p - r_f)$$

```
tan.port = tangency.portfolio(muhat.annual, covmat.annual, risk.free = r.f)
summary(tan.port, risk.free = r.f)
```

```
## Call:
## tangency.portfolio(er = muhat.annual, cov.mat = covmat.annual,
##   risk.free = r.f)
##
## Portfolio expected return:      0.2033
## Portfolio standard deviation:  0.5037
## Portfolio Sharpe Ratio:        0.2645
## Portfolio weights:
##   VALE3  PETR3
## 0.8767 0.1233
```

Fronteira eficiente (2 ativos / long-short + r_f)

O x marca o ponto em que a linha reta saindo da taxa livre de risco **toca** a fronteira eficiente e consequentemente indica a carteira tangente que é a carteira eficiente quando se leva em consideração um ativo livre de risco.



Carteira de mínima variância long-only

Vamos agora calcular a carteira de mínima variância impondo a restrição de não ficar vendido em nenhum ativo (*long-only*). Dado que para 2 ativos, como visto antes, os ativos caem sobre a fronteira, para produzir uma fronteira eficiente com a restrição de *long-only* é necessário introduzir pelo menos mais um ativo.

```
filelist <- c("data/VALE3.monthly.raw.csv", "data/PETR3.monthly.raw.csv",  
             "data/USIM3.monthly.raw.csv")  
returns.monthly.x <- getReturnsFromYahooFiles(filelist)  
muhat.annual <- apply(returns.monthly.x, 2, mean) * 12  
sigma2.annual <- apply(returns.monthly.x, 2, var) * 12  
sigma.annual <- sqrt(sigma2.annual)  
covmat.annual <- cov(returns.monthly.x) * 12  
covhat.annual <- cov(returns.monthly.x)[1, 2] * 12  
rhohat.annual <- cor(returns.monthly.x)[1, 2]
```

Otimização quadrática

Os problemas de otimização quadrática são descritos como

$$\min_x \frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{D} \mathbf{x} - \mathbf{d}' \mathbf{x}$$

Sujeito as restrições

$$\mathbf{A}'_{neq} \mathbf{x} \geq \mathbf{b}_{neq}$$

$$\mathbf{A}'_{eq} \mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq}$$

onde considera-se m restrições em desigualdades e l restrições em igualdades. As matrizes tem dimensões $\mathbf{D} \equiv n \times n$, $\mathbf{x} \equiv n \times 1$, $\mathbf{d} \equiv n \times 1$, $\mathbf{A}'_{neq} \equiv m \times n$, $\mathbf{b}_{neq} \equiv m \times 1$, $\mathbf{A}'_{eq} \equiv l \times n$ e $\mathbf{b}_{eq} \equiv l \times 1$.

Definindo o problema de otimização de carteiras

Para colocarmos o problema de otimização de carteiras no *framework* de otimização quadrática temos que

$$\mathbf{D} = 2\mathbf{\Sigma} \text{ e } \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

o vetor x é o vetor de pesos onde $x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$, onde n é a quantidade de ativos presentes na carteira. Esta restrição representa uma inequação e deve ser especificada com $l = n$

$$\mathbf{A}'_{neq} = \mathbf{I}_n, \mathbf{b}_{neq} = \mathbf{0}$$

temos ainda $m = 1$ restrição em igualdade, onde $\mathbf{x}'\mathbf{1} = 1$ e deve ser especificada como

$$\mathbf{A}'_{eq} = \mathbf{1}', \mathbf{b}_{eq} = 1$$

O problema pode ainda ser simplificado fazendo

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \mathbf{1}' \\ \mathbf{I}_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Construindo as matrizes

Matriz D

```
D.mat <- 2 * covmat.annual
```

```
##          VALE3  PETR3  USIM3  
## VALE3  0.5858  0.1447  0.1066  
## PETR3  0.1447  1.7013  0.0894  
## USIM3  0.1066  0.0894  0.6889
```

Vetor d

```
d.vec <- rep(0, 3)
```

```
## [1] 0 0 0
```

Construindo as matrizes

Matriz A

```
A.mat <- cbind(rep(1, 3), diag(3))
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]  
## [1,]   1   1   0   0  
## [2,]   1   0   1   0  
## [3,]   1   0   0   1
```

Vetor b

```
b.vec <- c(1, rep(0, 3))
```

```
## [1] 1 0 0 0
```

Utilizando `solve.QP` para minimizar a variância

Utilizamos a função `solve.QP` do pacote `quadprog` para encontrar a solução do problema de otimização.

```
library(quadprog)
qp.out <- solve.QP(Dmat = D.mat, dvec = d.vec, Amat = A.mat, bvec = b.vec,
  meq = 1)
```

A solução, que são os pesos dos ativos na carteira ficam no atributo `solution` da saída da função.

```
qp.out$solution
```

```
## [1] 0.4665 0.1366 0.3969
```

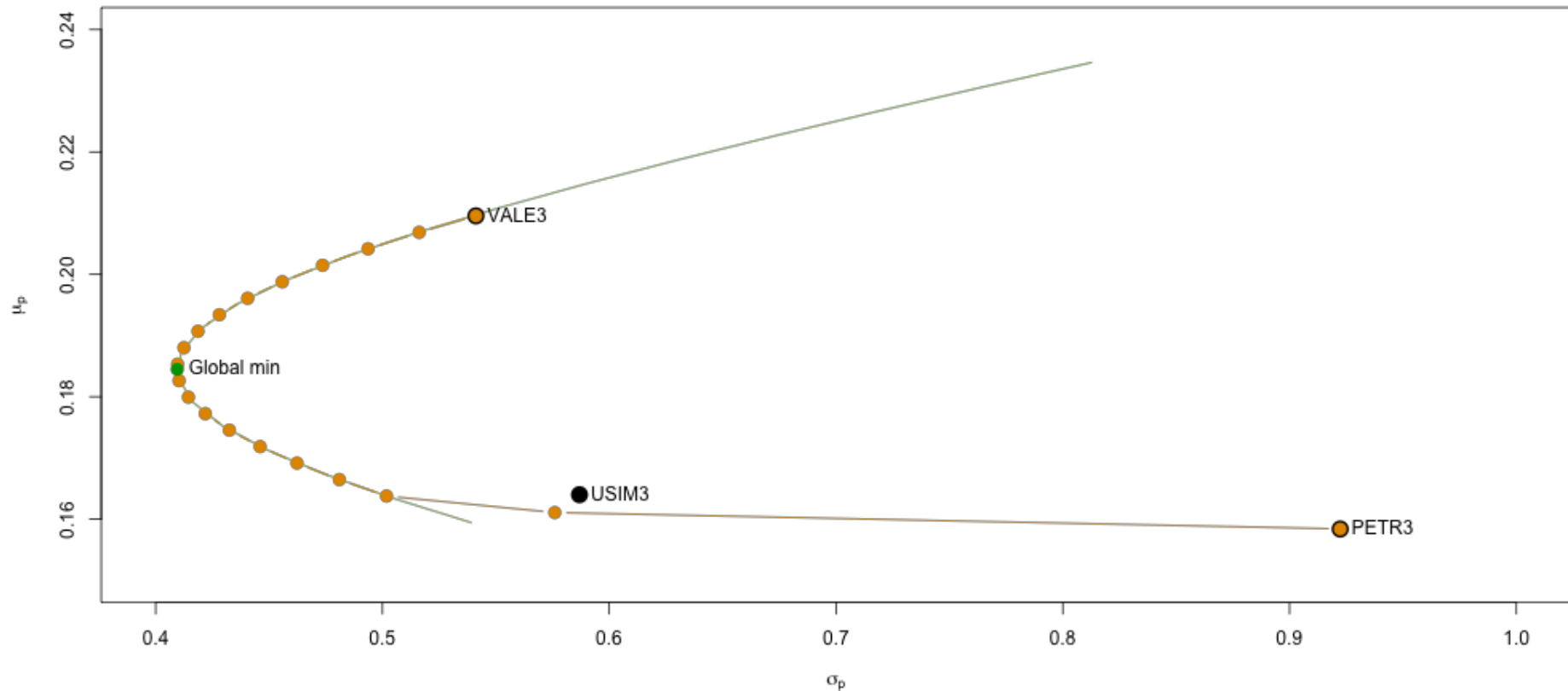
Calcular a média e a variância da carteira eficiente

```
w.gmin.ns <- qp.out$solution
names(w.gmin.ns) <- names(muhat.annual)
er.gmin.ns <- as.numeric(crossprod(w.gmin.ns, muhat.annual))
var.gmin.ns <- as.numeric(t(w.gmin.ns) %*% covmat.annual %*% w.gmin.ns)
sigma.gmin.ns <- sqrt(var.gmin.ns)
c(er.gmin.ns, sigma.gmin.ns)
```

```
## [1] 0.1845 0.4095
```

Fronteira eficiente (3 ativos / long-only)

A linha verde é a fronteira eficiente *long-short* e a linha em dourada é a fronteira eficiente *long-only*.



Teoria de carteiras de Markowitz

twitter @aboutwilson

www www.aboutwilson.net/trading-strategies/

github github.com/wilsonfreitas