# Testes de cointegração

## Avaliando a existência de relação de conintegração entre séries temporais

Wilson Freitas
Quant Developer

# Recursos

- index.Rmd

# Teste de Engle & Granger (EG)

# Teste de Engle & Granger

- Objetivo: testar a existência de cointegração entre duas séries temporais $I(1)$ ($y_{1,t}$ e $y_{2,t}$)
- Rodar a regressão (MQO)

$$y_{1,t} = \alpha + \beta y_{2,t} + \varepsilon_{1,t}$$

- Realizar teste de raiz unitária (RU) para os resíduos $\hat{\varepsilon}_{1,t} = y_{1,t} - \hat{\alpha} - \hat{\beta} y_{2,t}$ sob o seguinte modelo

$$\hat{\varepsilon}_{1,t} = \phi \hat{\varepsilon}_{1,t-1} + \eta_t$$

- Onde as seguintes hipóteses devem ser testadas.

$$\begin{aligned} H_0 &: \hat{\varepsilon}_{1,t} \, \text{tem RU} \longrightarrow \text{não há cointegração} \\ H_1 &: \hat{\varepsilon}_{1,t} \, \text{não tem RU} \longrightarrow \text{há cointegração} \end{aligned}$$

- O teste de raiz unitária sobre os resíduos deve ser realizado **sem drift** e **sem tendência deterministica**.
- Os resíduos $\varepsilon\hat{_{1,t}}$ necessariamente terão média nula, exceto nos casos em que a amostra é pequena e $\varepsilon\hat{_{1,t}}$ possui um valor absolute alto.

# Teste de Engle & Granger (valores críticos)

- Os valores críticos do teste RU para os resíduos são **diferentes** dos utilizados no teste RU-ADF.
- Isso acontece porque os testes RU são realizados sobre uma série temporal observada e aqui o teste é realizado sobre uma série temporal estimada, obtida através do processo de estimação de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$.
- Se tivessemos os valores **reais** de $\alpha$ e $\beta$ poderiamos utilizá-los para obter os resíduos e assim executar o teste de raiz unitária sobre eles utilizando os mesmos valores críticos utilizados no teste ADF.
- Felizmente MacKinnon obteve estes valores críticos para os testes de cointegração (MacKinnon, J.G. (2010), "Critical Values for Cointegration Tests," Queen's Economics Department Working Paper No. 1227).

# Teste de Engle & Granger (particularidades)

- Consideremos o processo gerador: $z_t = \alpha + \beta z_{t-1} + \eta_t$.
- Quando o processo gerador da série temporal é sem drift, $\alpha = 0$, a estatística do teste RU tem uma distribuição de Dickey-Fuller (DF).
- Quando $\alpha \neq 0$ a estatística do teste RU é $N(0,1)$, assintoticamente, e em amostras pequenas (finitas) esta distribuição *talvez* possa ser aproximada da distribuição de DF.

---

- No teste de EG a distribuição da estatística do teste de RU depende de $\alpha$ (do modelo $y_{1,t} = \alpha + \beta y_{2,t} + \varepsilon_{1,t}$), no entanto, as tabelas assumem $\alpha = 0$ e isso pode gerar erros quando $\alpha \neq 0$.
- Uma forma de evitar a dependência em $\alpha$ na distribuição da estatística de teste é introduzir um termo de tendência deterministica na regressão

$$y_{1,t} = \alpha_0 t + \alpha + \beta y_{2,t} + \varepsilon_{1,t}$$

- Assim a distribuição da estatística torna-se invariante a $\alpha$ embora seja diferente do caso sem a tendência deterministica.
- Dessa maneira, temos 2 variantes para o teste de EG: **com drift** e **com tendência deterministica**.

# Teste de Engle & Granger

## Curiosidades

- Qualquer variável pode ser escolhida como regressor, podemos escolher tanto $y_{1,t}$ quanto $y_{2,t}$.
- No limite o teste pode ser realizado com ambas as variáveis, separadamente, para tornar a análise mais robusta.
- Este teste pode ser realizado ainda para avaliar a existência de cointegração em $N$ séries temporais simultâneamente.

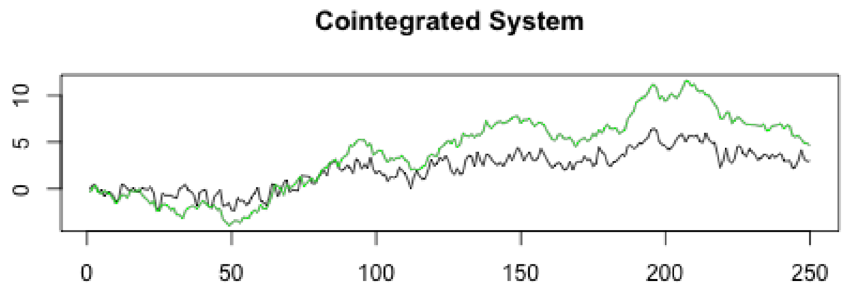
---

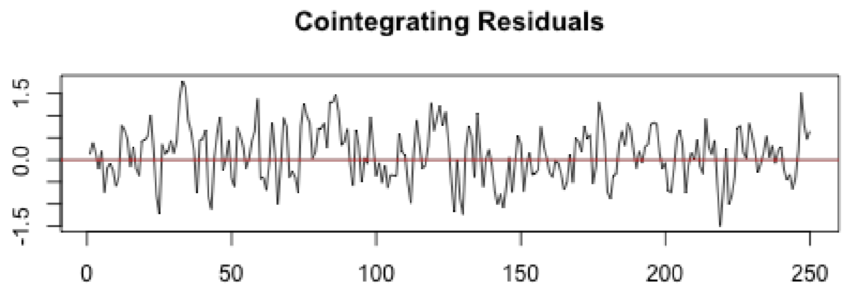
## Dúvidas

- Quando faz sentido utilizar a tendência deterministica?
- Engle & Yoo (1991) argumentam que existem boas razões para introduzir tendência deterministica.
- É importante notar que essa diferença na modelagem é referente a regressão na qual os resíduos são estimados e sob os quais o teste de RU é executado.

## Gerando séries claramente cointegradas

```
set.seed(12345)
e1 <- rnorm(250, mean = 0, sd = 0.5)
e2 <- rnorm(250, mean = 0, sd = 0.5)
u.ar3 <- arima.sim(model = list(ar = c(0.6, -0.2, 0.1)), n = 250, innov = e1)
y2 <- cumsum(e2)
y1 <- u.ar3 + 0.5 * y2
```



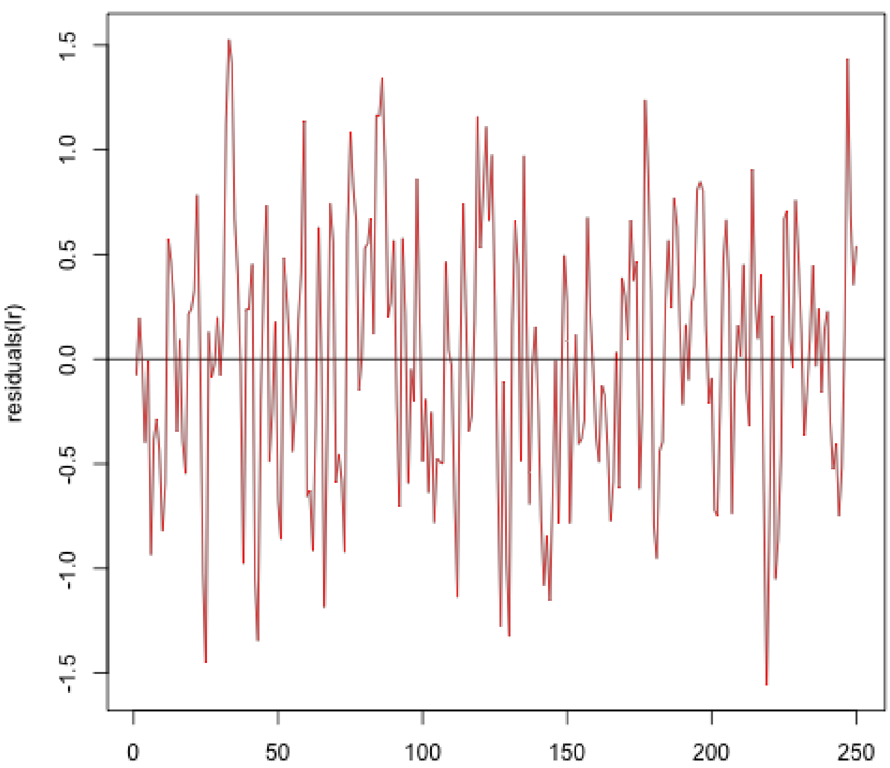
## Passo 1

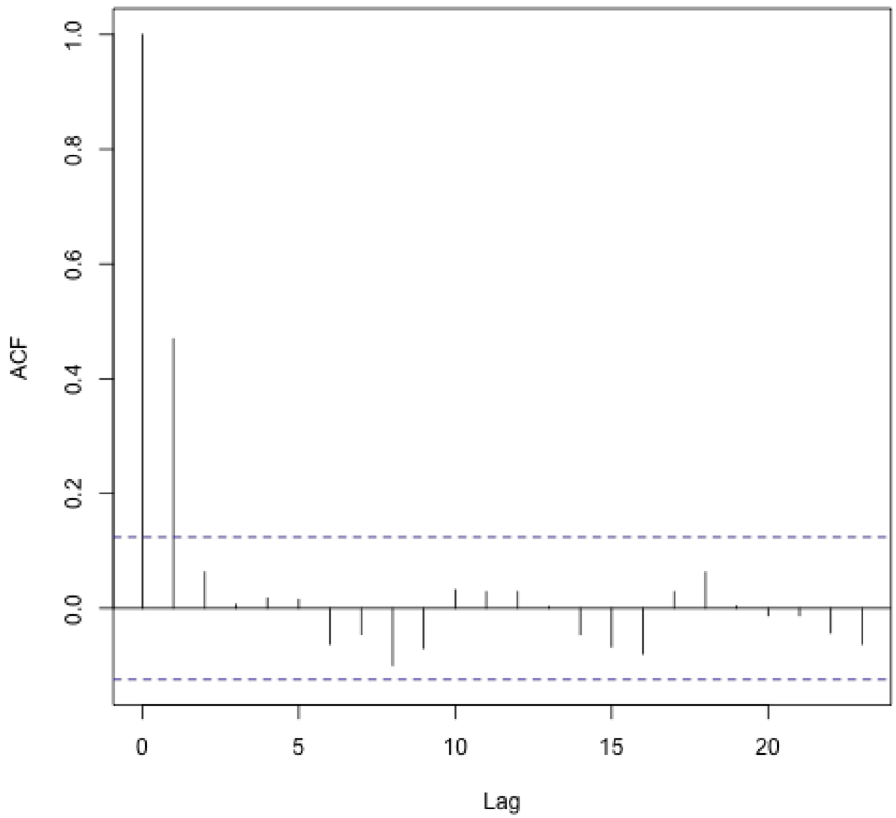
Estimar regressão entre variáveis `y1` e `y2`.

```
lr <- lm(y1 ~ y2)
summary(lr)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = y1 ~ y2)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -1.5557 -0.4407  0.0053  0.4403  1.5273
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  0.19143    0.05276    3.63  0.00035 ***
## y2           0.48218    0.00939   51.36  < 2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.608 on 248 degrees of freedom
## Multiple R-squared: 0.914,   Adjusted R-squared: 0.914
## F-statistic: 2.64e+03 on 1 and 248 DF,  p-value: <2e-16
```

# Resíduos da regressão



## Passo 2

Testar a existência de raiz unitária nos resíduos.

```
library(urca)
ur <- ur.df(y = residuals(lr), lags = 4, type = "none", selectlags = "BIC")
ur@teststat
```

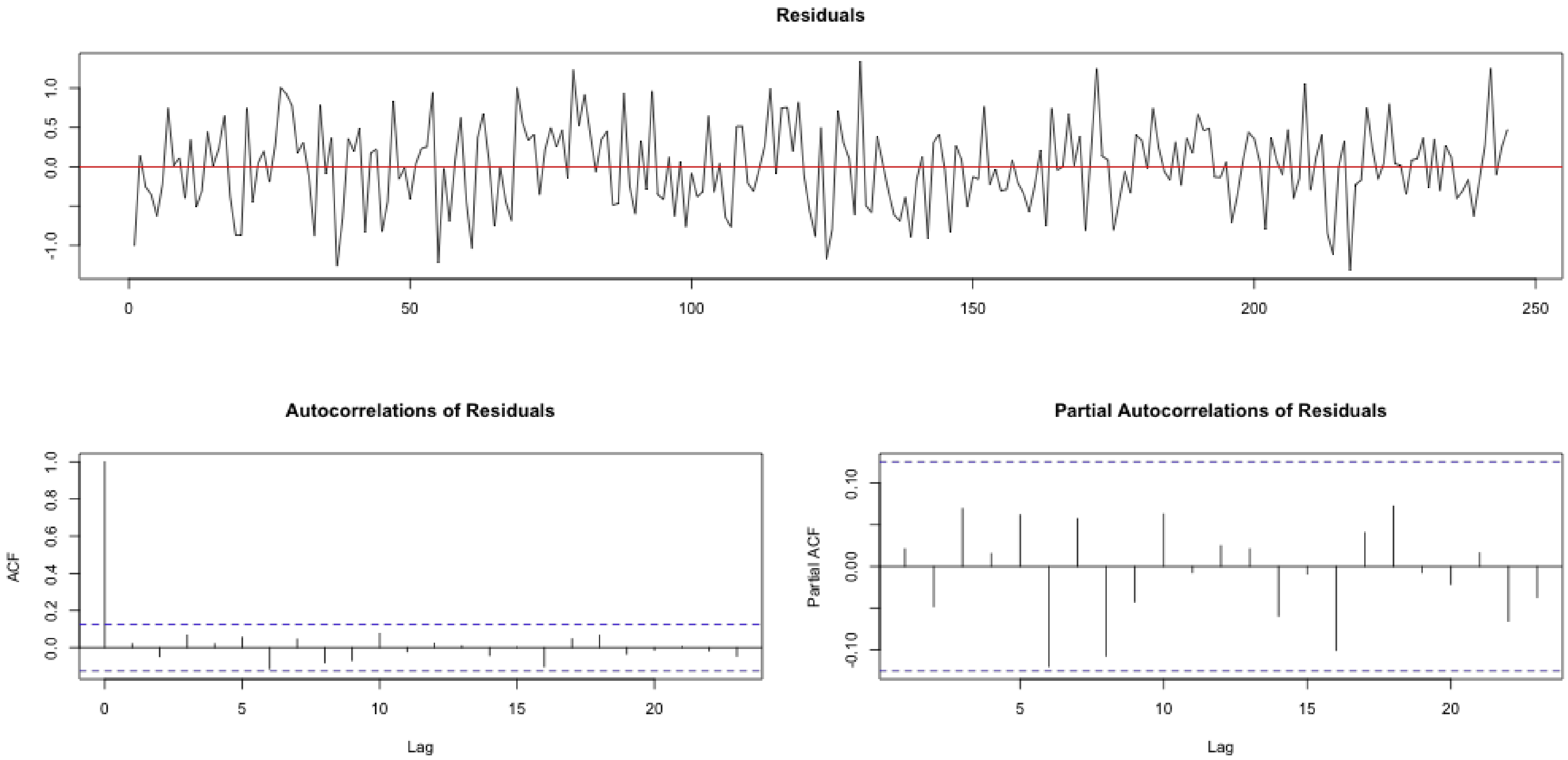
```
##              tau1
## statistic -9.809
```

Valores críticos

```
##        1pct   5pct  10pct
## tau1 -3.943 -3.362 -3.063
```

- Não podemos aceitar a hipótese nula de existência de raiz unitária, portanto, não podemos rejeitar a hipótese de que as séries são **cointegradas**.

# Resíduos do teste de raiz unitária



# Testes de cointegração

twitter @aboutwilson
www www.aboutwilson.net/trading-strategies/
github github.com/wilsonfreitas